



حل تشابهی معادلات ناویژ استوکس برای جریان سیال ویسکوز نیوتنی غیرقابل تراکم در اطراف دیسک صاف و چرخان با سرعت زاویه

سید عباس اولیایی¹

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک،

دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد

a_oliaie@yahoo.com

دکتر سید رضا سما

استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد

اسلامی، مشهد

S_r_saleh@yahoo.com

چکیده

در مطالعه ارائه شده به دنبال تولید و انجام نوعی حل دقیق معادلات ناویژ استوکس² (که به حل تشابهی برای سیال ویسکوز نیوتنی و تراکم ناپذیر در یک طرف دیسکی صاف و نازک که با سرعت زاویه ای متغیر حول محور عمده در صفحه دیسک، در حال چرخش است می‌باشیم. سیال در دور دست از دیسک ساکن است. از آنجا که سرعت زاویه تابعی از زمان است بنابراین معادلات حاکم نیز وابسته به زمان تحلیل معادلات ناپایای جریان با فرض تقارن محوری حول محور دیسک امکان ایجاد حل تشابهی که در دسته حل‌های دقیق معادلات ناویژ استوکس قرار می‌گیرد را می‌تواند با تعریف متغیر تشابه و تعریف توابع بی بعد بر حسب آن و اعمال شرایط ایجاد حل تشابهی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (حل دقیق) می‌دهیم که در آن پارامتری وابسته به شتاب دیسک دیده می‌شود. با حل معادلات به دست آمده توسط ترکیب جدیدی از دو روش رانگ کوتا مرتبه³ چهار و شوتینگ⁴، پروفیل‌های جریان در سه راستا و لایه مرزی به ازای مقادیر مختلف پارامتر وابسته به شتاب مورد بررسی قرار می‌گیرند و روابطی برای بدست آوردن تنش جانبی و مومنوم تولیدی توسط دیسک بدست می‌آید..

های کلیدی: لایه مرزی، معادلات ناویژ استوکس، متغیرهای تشابه، توابع بی بعد، حل تشابهی، حل دقیق.

².Navier-Stokes

³.Runge-Kutta

⁴.Shooting



مغناطیسی و با فرض عدم تقارن محوری جریان در مرجع [10] بررسی شده است.

[11] تغییر ضخامت دو لایه سیال مختلف و مخلوط نشدنی روی دیسک چرخان با در نظر گرفتن فصل مشترک و سطح آزاد در مدل نمود را بررسی کرد که در آن با استفاده از تبدیل تشابهی، معادلات حاکم را به دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی و غیر خطی ساده تری تبدیل کرد و با روش تفاضل محدود⁸ نتایج عددی را ارائه اثرات مختلف بخیخیر حلال تنش سطحی سیال غیر نیوتن-زبری سطح روی ضخامت فیلم سیال بر روی دیسک چرخان در [12,13,14]

مدل ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مسائل علوم و مهندسی به معادلات دیفرانسیل جزئی یا معمولی بسیار غیر خطی منجر می شود که برای آنها فرم حل کلی و ای یافت نمی . از این رو جستجو برای رسیدن به های تحلیلی معادلات غیرخطی بسیار فراوان بوده . در کنار استفاده از روش پرتوربیشن⁹

ریاضی زیادی در [15,16,17] گسترش یافته است. بعضی از این روش های تبدیل مختصات برای کاهش درجه معادلات یا ساده تر کردن آنها استفاده می شود و در بعضی از روش به حل دقیق همگرا می

لیا¹⁰ و یک روش حل تحلیلی برای مسائل غیر خطی ایجاد کرد که به روش آنالیز هموتوبی¹¹

[18]. او این روش را با موفقیت برای حل معادلات بلازیوس¹² و فالکنر اسکن¹³ به کار برد. مسأله کلاسیک - کارمن با روش جدید آنالیز هموتوبی به صورت تحلیلی ارائه شد [19]. حل تحلیلی لایه مرزی دیسک چرخان متخلخل تحت مکش یا دمش یکنواخت با آنالیز هموتوبی [20] و برای سیال هیدرو مغناطیس تحت همین شرایط و با حل روش آنالیز هموتوبی در [21]

. از جمله تحقیقات انجام شده دیگر در زمینه

جریان دیسک چرخان می توان به بررسی جریان سیال

حل های دقیق برای معادلات ناویِر استوکس یا فرم ساده شده آنها که به معادلات لایه مرزی پراتنل⁵ در حالت کلی به خاطر غیر خطی بودن، امکان استفاده از اصل جمع آثار را ندارند و بنابر این درباره نظریات کلی اندکی موجود است. با این حال در حالت

های غیر خطی اینرسی، راه های دقیقی بدست آمد . البته امروزه با پیشرفت های عددی امکان حل کامل معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی فراهم می . همانطور که می دانیم های تحلیلی و هم حل های تشابهی یا نیمه تشابهی در های دقیق معادلات ناویِر استوکس قرار می گیرند. های دقیق ناویِر وکس با ارائه

فرمول تحلیلی، برای جریان های خطی و جریان داخل کانال، جریان های متقارن محوری و همچنین جریان ساکن با حرکت صفحه به وجود آمده است [1,2]. - کارمن⁶ اولین کسی بود که معادلات ناویِر استوکس را برای جریان سیال اطراف دیسک چرخان با سرعت ثابت مورد بررسی [3].

محوری جریان در مختصات قطبی و اینکه متغیر ها خواهند بود یا یافتن متغیر بی بعد تشابه و تعریف تمام توابع بر حسب آن به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی رسید و آن را با دقت خوبی بیی توسط سری ها حل کرد [4] بعد ها کوچران⁷ [5] با جدا کردن معادلات حاکم از دو منطقه نزدیک و دور از دیسک حل دقیق تری را

در ادامه، حل کلاسیک فن کارمن با فرض عدم تقارن محوری برای سیال ویسکوز و ویسکوالاست بررسی شد [6,7]. حل برای سیال هیدرو مغناطیس در اطراف دیسک

جریان به صورت عددی در مرجع [8,9] و همچنین حل دقیق و ارائه روابط کاملا تحلیلی برای پروفیل و دمای بی بعد برای سیال هیدرومغناطیس اطراف دیسک در میدان یکنواخت

⁸. Finite difference

⁹. Perturbation

¹⁰. Liao

¹¹. Homotopy analysis method

¹². Blasius

¹³. Falkner-Skan

⁵. Prandtl

⁶. Von Karman

⁷. Cochran

معادلات به دست آمده، پروفیل‌های جریان و لایه مرزی ستای مختصات به ازای مقادیر مختلف پارامتر وابسته به شتاب مورد بررسی قرار می‌گیرند و روابطی برای بدست آوردن تنش جانبی و مومنتم تولیدی توسط دیسک بدست می‌آید.

2 معادلات حاکم بر مسئله
یک جریان آرام و ناپای سیال ویسکوز نیوتنی و غیر قابل تراکم در اطراف دیسک صاف و نازک با شعاع زیاد واقع
 $z = 0$

(r, θ, z) که در حال چرخش حول محور $r = 0$ در نظر می‌گیریم. سیال در دور دست ساکن فرض می‌شود و با توجه به جریان متقارن حول محور مؤلفه شعاعی، جانبی و محوری هستند، که به ترتیب سرعت u, v, w می‌باشند:

$$V = u(r, z, t)\hat{e}_r + v(r, z, t)\hat{e}_\theta + w(r, z, t)\hat{e}_z \quad (1)$$

از معادلات پیوستگی و مومنتم (معادلات ناویز استوکس):

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

با شرایط مرزی:

$$z = 0 : u = w = 0 \quad p = 0 \quad v = r\omega \quad (6)$$

$$z \rightarrow \infty : u = v = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

چرخش دیسک سبب می‌شود سیال نزدیک دیواره به

غیر قابل تراکم بین دو دیسک چرخان هم محور ولی با
های زاویه

جریان [22]، جریان سیال هیدرومغناطیس ناشی از چرخش غیر هم محور دیسک و سیال دور دست واقع در یک میدان مغناطیسی یکنواخت با حل تحلیلی از طریق روش تبدیل لاپلاس [23] و حل سیال تراکم پذیر در مسأله کلاسیک فح کارمن در مرجع [24] اشاره کرد.

در مطالعه ارائه شده به دنبال تولید و انجام نوعی حل دقیق معادلات ناویز استوکس (که به حل تشابهی برای سیال ویسکوز نیوتنی و تراکم ناپذیر

در یک طرف دیسکی صاف و نازک که با سرعت زاویه متغیر حول محور عمود بر صفحه دیسک، در حال چرخش است می‌باشیم. سیال در دور دست از دیسک ساکن است. از آنجا که سرعت زاویه ای تابعی از زمان است بنابراین معادلات حاکم نیز وابسته به زمان متغیر است. معادلات ناپایای جریان با فرض متقارن

محوری حول دیسک امکان ایجاد حل تشابهی که در دسته حل های دقیق معادلات ناویز استوکس قرار می‌گیرد را می

برای دوری از اثرات به هم ریختگی در لبه های دیسک فرض بر این است که شعاع دیسک نا محدود است و یا نسبت شعاع به ضخامت لایه مرزی بسیار بزرگ است. برای از بین بردن اثر وزن سیال، دیسک را افقی در نظر می‌گیریم.

به علت شرط عدم لغزش سیال نیوتنی در روی دیسک، لایه سیال روی دیسک تحت تاثیر نیروی گریز از مرکز ناشی از چرخش دیسک، در جهت شعاع و به سمت بیرون دارای مولفه سرعت شعاعی می‌شود. در محیط پیوسته سیال، ذرات در نقاط دورتر از دیسک به ترتیب تحت تاثیر حرکت ذرات قبل از خود قرار می‌گیرند و با توجه به الزام بقاء جرم در محیط پیوسته سیال، ذرات دورتر در جهت محوری به سمت دیسک حرکت می‌کنند تا جای ذرات به بیرون رانده شده را پر کنند. که این روند جریانی تقریباً مشابه پمپ را در لبه و در نزدیکی دیسک ایجاد می‌کند. با تعریف متغیر تشابه و تعریف توابع بر حسب آن و اعمال شرایط ایجاد حل تشابهی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌رسیم که در آن پارامتری وابسته به شتاب دیسک دیده می‌شود.

با جایگذاری معادلات (9 12)

دیفرانسیل (2 5) و اعمال شرط لازم برای حل تشابهی به

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر می‌رسیم:

$$2F + H' = 0 \quad (13)$$

$$-a(F + \frac{1}{2}\zeta F') + F^2 + F'H - G^2 - F'' = 0 \quad (14)$$

$$-a(G + \frac{1}{2}\zeta G') + 2FG + HG' - G'' = 0 \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2}a(H + \zeta H') + P' + HH' - H'' = 0 \quad (16)$$

با شرایط مرزی:

$$\zeta = 0: \quad F = 0, G = 1, H = 0, P = 0 \quad (17)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: \quad F = 0, G = 0 \quad (18)$$

که در آن $\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = -a$ یک عدد ثابت و پارامتر وابسته

کمی . با توجه به غیر کوپل بودن

$$(15) \quad (13) \quad (16)$$

نتایج را فقط برای معادلات مومنتوم ارائه خواهیم داد.

شرط لازم برای ایجاد حل تشابهی¹⁴

فوق کافی است $\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega^2(t)}$:

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega^2} = C \rightarrow \frac{d\omega}{\omega^2} = C dt \rightarrow \omega^{-1} = Ct + D \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \frac{-1}{Ct + D}, \dot{\omega}(t) = \frac{C}{(Ct + D)^2} \quad (19)$$

$$\dot{\omega}(0) = \alpha_0 \quad \omega(0) = \omega_0 \quad t = 0$$

$$\omega(t) = \frac{-1}{\frac{\alpha_0 t}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{\alpha_0}{\omega_0} t} \quad (20)$$

متغیر ζ حکم پارامتر دارد که به ازای مقادیر مختلفش باید دستگاه حل شود.

$\omega > 0$ در تعریف متغیر ζ

های کیفی برای $\omega(t)$ تند و کند شونده به

مطابق شکل‌های (2) (3) . در شکل‌های (2) (3)

اگر افزایش فشار در جهت شعاع وجود داشت تا شتاب جانب مرکز را تأمین کند، لزوماً خطوط جریان به شکل دایره‌ای در اطراف دیسک به وجود می‌آید. در حالی که همانند پمپ خطوط جریان نزدیک به دیسک به سمت بیرون می‌باشد.

$$p = p(z, t)$$

نیروها در راستای شعاع، تولید مؤلفه

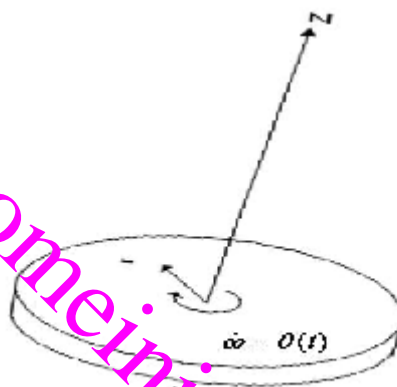
$$u > 0$$

می‌کند. از طرفی این جریان جرم خروجی با توجه به

پیوستگی جرم در هر حجم کنترل اطراف دیسک یک

جریان محوری به سمت دیسک، $w < 0$ را ایجاد می

کند. مطابق شکل (1).



شکل (1)

برای بدست آوردن حل دقیق معادلات نویز استوکس، مفید است که فاصله از دیوار z را به کمیت $\sqrt{\nu/\omega(t)}$ مرتبط کنیم، به عبارت دیگر فاصله بدون بعد از دیوار را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega(t)}{\nu}} \quad (8)$$

- کارمن در مرجع [4]

فوق با تعریف توابع بی‌بعد زیر امکان پذیر است با این

تفاوت که در اینجا ω تابعی از زمان است و متغیر

ζ به طور مستقیم به مکان و به طور غیر مستقیم

:

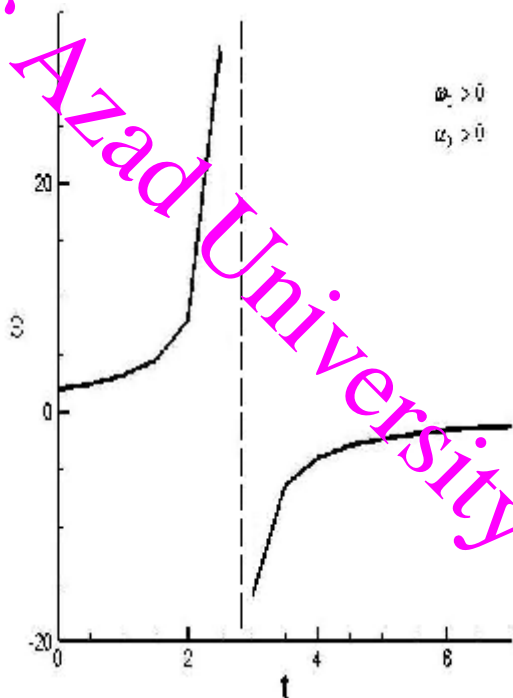
$$u = r\omega(t)F(\zeta) \quad (9)$$

$$v = r\omega(t)G(\zeta) \quad (10)$$

$$p = \rho\nu\omega(t)p(\zeta) \quad (11)$$

$$w = \sqrt{\nu\omega(t)}H(\zeta) \quad (12)$$

¹⁴. Similarity solution



شکل (3) نمودار کیفی تابع ω (19) در حرکت تند
($a < 0$)

غیر خطی و کوپل که برای H و G
درجه دو می باشد می رسمیم.

با توجه به شرایط مرزی موجود باید از ترکیب دو
شوتینگ همزمان برای دو معادله که خود به هم وابسته
اند استفاده کنیم، که این خود روش جدیدی در الگوریتم
حل های معادله دیفرانسیل با روش شوتینگ می
توجه به تعریف متغیر تشابه در (8)
 $\omega > 0$ امکان پذیر است.

4 نتایج

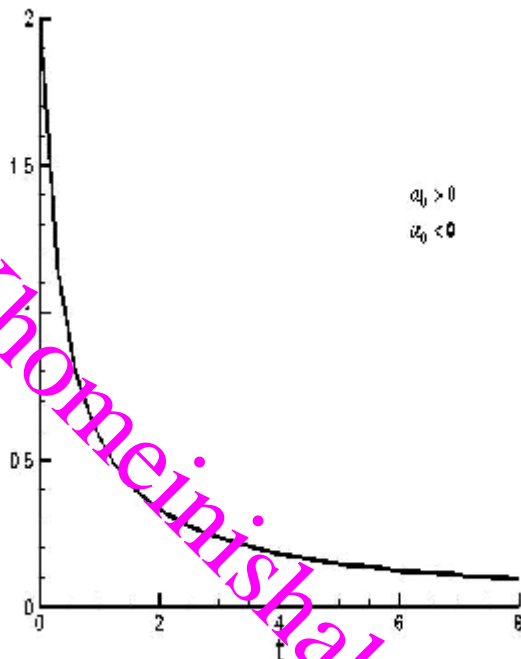
$a = 0$ که حالت حرکت بدون شتاب و با سرعت

ξ

معادلات کلاسیک فرّ کارمن [4] تبدیل می شود که نتایج
با هم در شکل (4) مقایسه شده است و به عنوان نمونه
برای همین وضعیت ($a = 0$)
برای ضخامت لایه مرزی و تنش برشی جانبی دیواره و
گشتاور تولیدی روابطی ارائه می شود.

برای حل در وضعیت سرعت ثابت نقطه بی نهایت که در
ها با دقت خوبی مستقل از متغیر ξ

$a > 0$ به منزله شتاب زاویه ای منفی و افزایش پارامتر
 a ، در نتیجه ی افزایش ω است که لزوما در آن
 $\dot{\omega}$ با نرخ بیشتری افزایش می یابد و $a < 0$
شتاب زاویه افزایش مقدار عددی پارامتر a
نتیجه ی کاهش ω است که باید در آن $\dot{\omega}$
بیشتری کاهش یابد.



شکل (2) نمودار کیفی تابع ω (19) در حرکت کند
($a > 0$)

باید توجه داشت که در حرکت تند شونده به علت
مغایب زمانی، محدوده ی حل تشابهی برای این حالت به

$$t < \frac{\omega_0}{\alpha_0}$$

مغایب دارای شرایط حل تشابهی خواهد بود.

3 روش حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بدست

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (15-13) ایط
(18-17) - کوتا مرتبه چهار و ترکیب

آن با روش شوتینگ به ازای مقادیر مختلف پارامتر a
با ترکیب معادلات پیوستگی (13)

(14) به دو معادله دیفرانسیل معمولی

با توجه به تقارن جریان حول محور های شعاعی یکدیگر را خنثی کرده و لذا گشتاور لازم برای چرخاندن دیسک با سرعت ثابت حول محور:

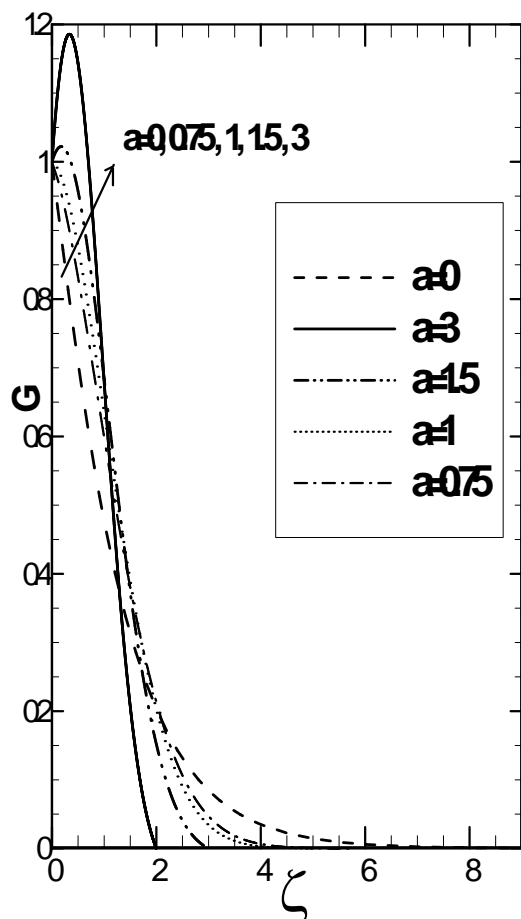
$$M = \int_0^{r_0} \tau_{z\theta} (2\pi r) dr = \frac{\pi}{2} \rho r_0^4 G'_0 \sqrt{\nu \omega^3} \quad (25)$$

با تعریف متغیر تشابه در (8)

$$a = -\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$$

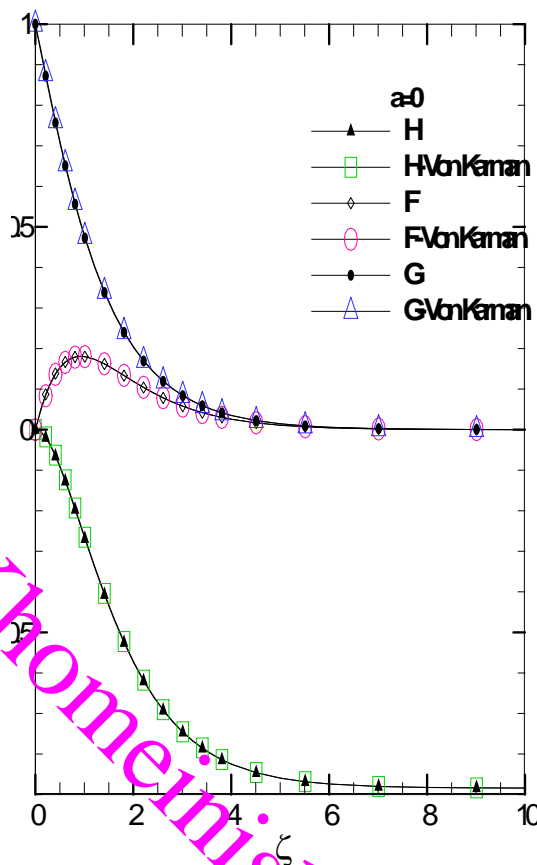
امکان پذیر است

حرکت تند $a < 0$ و در حرکت کند شونده $a > 0$ وضعیت پیش فرض در زمان شروع این بررسی و اعمال شتاب دیسک می



شکل (5) سرعت بی بعد جانبی در حرکت کند شو

با افزایش شتاب کند شونده تا حدود $a = 1.3$ لایه مرزی برای سرعت جانبی به سبب غالب بودن اثر نیرو



شکل (4) پروفیل H, G, F و مقایسه آن با [4]

$\zeta \cong 10$ لایه مرزی را تا نقطه ای که سرعت جانبی v 1 صد مقدار آن در دیواره باشد در نظر می گیریم یعنی جایی که $G = 0.01$ که این در نقطه $\zeta = 5.41$ در این بررسی و در [4] $\zeta = 5.4$ (1) در پیوست). پس ضخامت لایه مرزی با تعریف δ :

$$\delta = 5.41 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (21)$$

سرعت محوری در بی نهایت برای این بررسی $H(\infty) = -0.8840$ که این یعنی:

$$w(\infty) = -0.8840 \sqrt{\omega \nu} \quad (22)$$

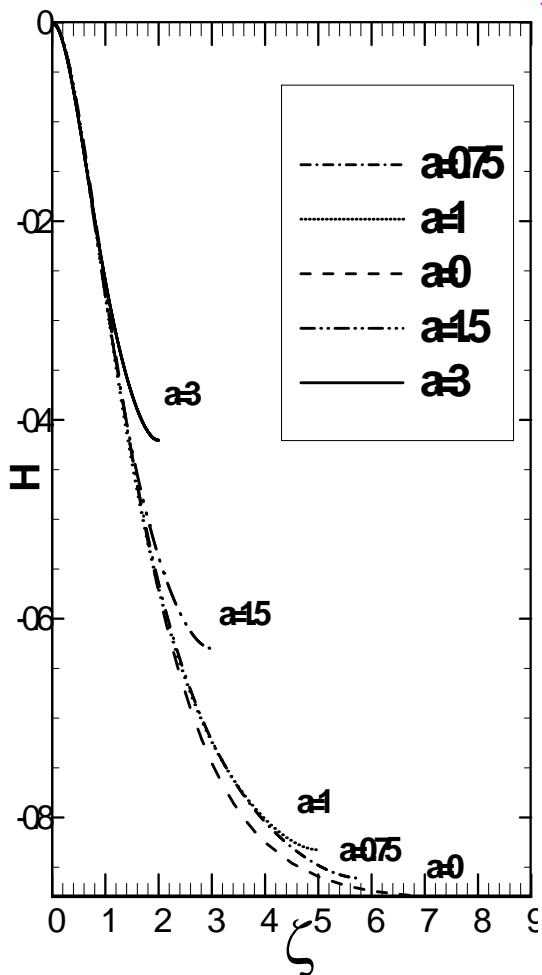
مؤلفه های تنش برشی روی دیواره:

$$\tau_{z\theta} = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho r G'_0 \sqrt{\nu \omega^3} \quad (23)$$

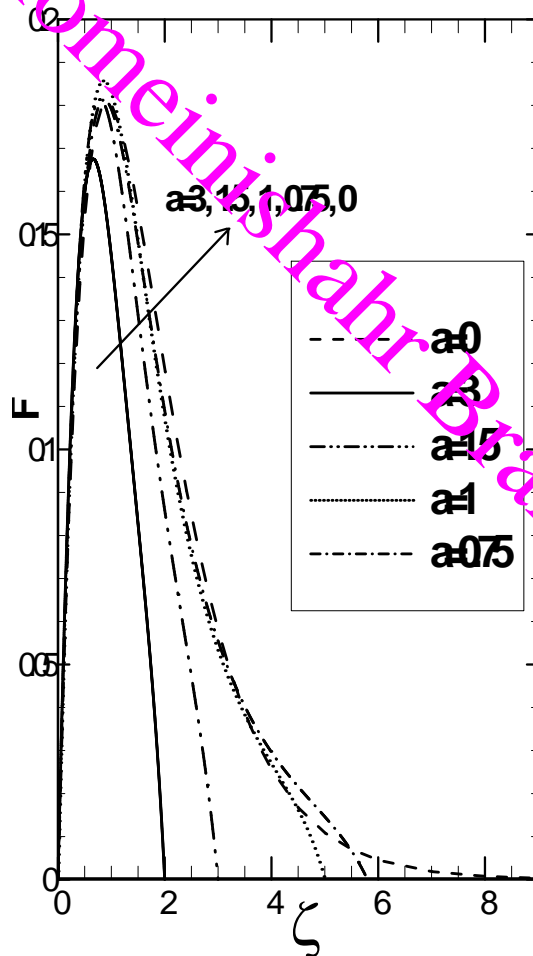
$$\tau_{zr} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho r F'_0 \sqrt{\nu \omega^3} \quad (24)$$

در حرکت کند شونده، افزایش a قبل، در نتیجه‌ی کاهش ω کاهش شتاب مرکز $(r\omega^2)$ ، کاهش پروفیل F در نتیجه کاهش پروفیل H را نتیجه می‌دهند. در این حالت نیز در فواصل دور از دیسک کاهش اثر نیروی ویسکوز در برابر اینرسی سکون ذرات سیال واقع در اطراف لایه مرزی را می‌توان مشاهده نمود. کوچک، کاهش سرعت H F دیسک که ناشی از غالب شدن اینرسی سکون ذرات ساکن بر اثر ویسکوز است، نا محسوس است و بسیار نزدیک به نمودار سرعت زاویه $a=0$ ، شکل (6)

- ی ویسکوز بر اندازه حرکت چرخشی تا فاصله ای نزدیک به دیواره افزایش می‌یابد. در همین فاصله از دیسک با کاهنده‌تر شدن شتاب در پروفیل سرعت جانبی اکسترمم دیده می‌شود. به این معنی که ذرات سیال نزدیک دیواره اعمال شتاب کاهنده را از $a > 1.3$ دیرتر درک می‌کنند و اندازه حرکت قبلی خود را حفظ می‌کنند. پس در این محدوده سرعت ماکزیمم روی دیسک نیست و در فاصله نزدیک از دیواره اتفاق می‌فتد و با افزایش شتاب منفی نقطه اکسترمم دورتر می‌شود. در فواصل دورتر از دیواره لایه مرزی سریع‌تر کاهش می‌یابد و با افزایش شتاب منفی نرخ کاهش ضخامت افزایش یافته و این رفتار را می‌توان به کاهش اثر تنش برشی ویسکوز در برابر اینرسی سکون ذرات سیال واقع در اطراف لایه مرزی نسبت داد، شکل(5).

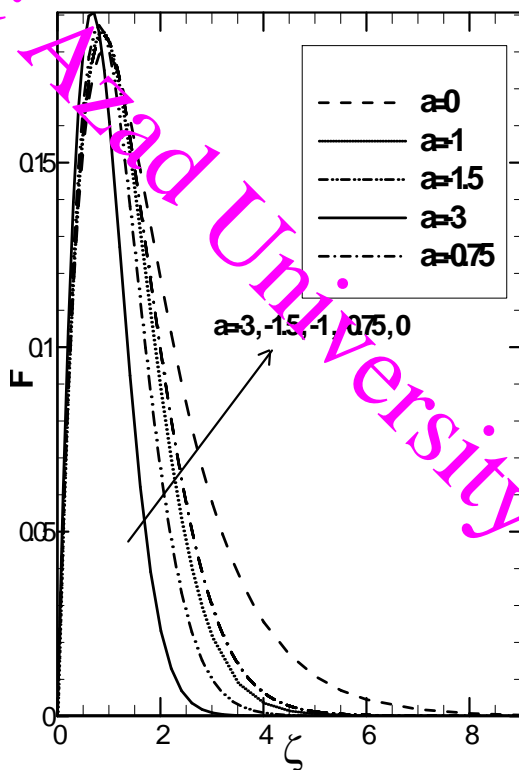


شکل (7) سرعت بی بعد محوری در حرکت کند شونده

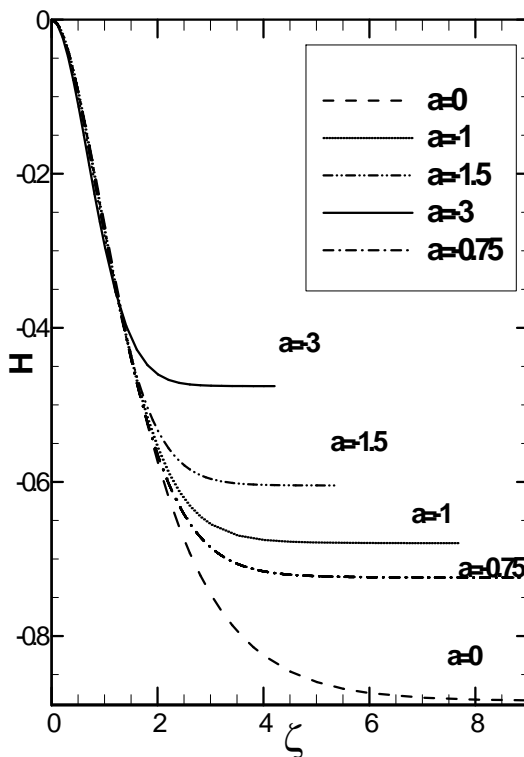


شکل (6) سرعت بی بعد شعاعی در حرکت کند شونده

در حرکت تند شونده افزایش شتاب و افزایش سرعت



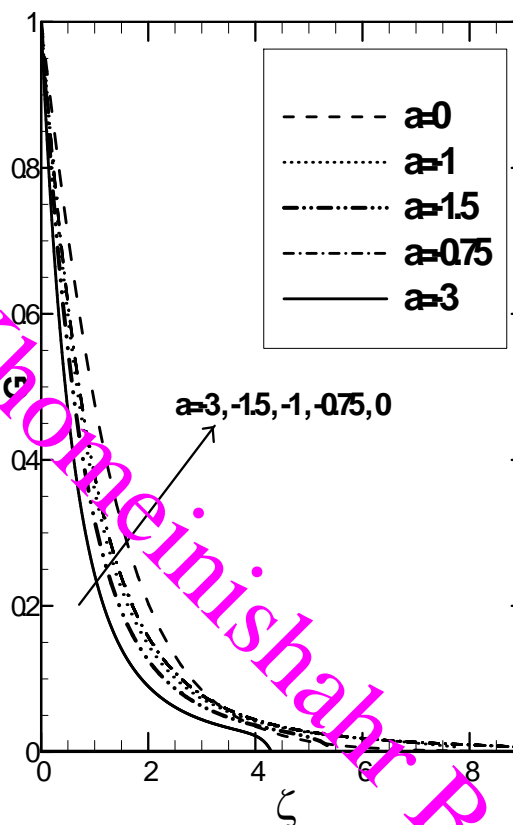
شکل (9) سرعت بی بعد شعاعی در حرکت تند شونده



شکل (10) سرعت بی بعد محوری در حرکت تند

چرخشی (افزایش رینولدز چرخشی $Re_{\omega} = \frac{\omega r^2}{\nu}$)

اندازه حرکت چرخشی نسبت به نیروی ویسکوز بیشتر است و باعث کاهش ضخامت لایه مرزی شده است، شکل (8).



شکل (8) پروفیل سرعت بی بعد جانی در حرکت تند شونده

از معادله پیوستگی حاکم بر مسأله می‌دانیم که برای هر حجم کنترل انتخابی و متقارن در اطراف دیسک، ذرات سیال ورودی با مؤلفه سرعت H در جهت $-z$ می‌آیند. بنابراین تغییرات این دو مؤلفه باید در مقادیر مختلف a در هر حالتی همگون باشند، یعنی با افزایش یکی دیگری هم افزایش و با کاهش یکی دیگری هم کاهش یابد.

به علت محدودیت زمانی (در وضعیت تند شونده به اویهای که قبلاً بحث امکان بررسی تغییرات تا زمان بی‌نهایت وجود ندارد) پس نتایج در گذشت زمانی اندک پس از اعمال شتاب باید تحلیل شوند. های کوچک، با افزایش شتاب

(افزایش ω) کاهش می‌یابد که به افزایش
اندازه حرکت نسبت به نیروی ویسکوز در راستای z

علائم یونانی

ω سرعت زاویه ای (rad/s)
 ν لزجت دینامیکی (m^2/s)
 δ ضخامت لایه مرزی (m)
 ζ متغیر تشابه بی بعد
 ρ چگالی (kg/m^3)
 μ لزجت سینمایی ($N.s/m^2$)
 τ (N/m^2)

زیرنویس ها

z, θ, r

بالنویس ها

ζ

لازم به ذکر است که با تغییر a ، محدوده همگرایی حل
نیز کاهش می‌یابد. یعنی با افزایش اندازه a که نسبت
بین شتاب زاویه ای و مجذور سرعت زاویه ای می باشد
کوچکتری همگرا می .

5 تقدیر و تشکر

از استاد ارجمند آقای دکتر سید رضا صالح که علاوه بر
پیشنهاد مطالعه و بررسی این موضوع، در راهنمایی و رفع
مشکل پیش در طول مراحل این مطالعه، کمک ها و
مشاوره های خوبی ارائه کردند، سپاسگزارم.

6

علائم انگلیسی

a پارامتر وابسته به نسبت شتاب و سرعت زاویه
F تابع بی بعد سرعت شعاعی
G تابع بی بعد سرعت جانبی
H بی بعد سرعت محوری
p (pa)

7 پیوست

(1) خلاصه ای از نتایج این مطالعه $a = 0$ - کارمن [4] در کنار هم

ζ	H present work	H-Von Karman	F-present work	F-Von Karman	G-present work	G-Von Karman
0	0	0	0	0	1	1
0.2	-0.01961	-0.0179	0.08694	0.0836	0.87203	0.878
0.4	-0.06554	-0.0628	0.13834	0.1364	0.75653	0.7621
0.6	-0.12725	-0.1239	0.16698	0.166	0.65069	0.6557
0.8	-0.19694	-0.1933	0.17919	0.1789	0.556	0.5605
1	-0.26909	-0.2655	0.17999	0.1801	0.47273	0.4766
1.4	-0.40708	-0.4038	0.1619	0.1625	0.33819	0.3411
1.8	-0.52535	-0.5226	0.13308	0.1338	0.23984	0.2419
2.2	-0.61992	-0.6178	0.10375	0.1044	0.16927	0.1708
2.6	-0.69238	-0.6907	0.0782	0.0788	0.11916	0.1202
3	-0.74639	-0.7452	0.05765	0.0581	0.08377	0.0845
3.4	-0.78591	-0.785	0.04187	0.0422	0.05884	0.0594
3.8	-0.81445	-0.8137	0.03009	0.0303	0.04132	0.0417
4	-0.82553	-0.8249	0.02544	0.0256	0.03462	0.0349
4.5	-0.84625	-0.8457	0.01661	0.0167	0.02224	0.0225

همایش ملی مهندسی مکانیک NCME2010
ایران، دانشگاه واحد خمینی شهر،

5	-0.85974	-0.8594	0.01078	0.0108	0.01428	0.0144
5.5	-0.86848	-0.8682	0.00697	0.007	0.00917	0.0093
6	-0.87412	-0.8739	0.00449	0.0045	0.00588	0.0059
7	-0.88008	-0.8799	0.00185	0.0018	0.00241	0.0024
8	-0.88252	-0.8824	0.00075	0.0007	0.00098	0.001
9	-0.8835	-0.8834	0.0003	0.0002	0.00039	0.0004
10	-0.88388	-0.8838	0.00011	0.0001	0.00014	0.0001

(2) نتایج حل با کد فرترن به ازای بعضی مقادیر a

a	$zeta$	H	F	G	a	$zeta$	H	F	G
-3	0	0	0	1	-0.75	0	0	0	1
	0.1	-0.00566	0.05501	0.8521		0.1	-0.00486	0.04707	0.90878
	0.4	-0.0752	0.16263	0.5395		0.4	-0.06417	0.13977	0.67832
	0.8	-0.22261	0.18611	0.311		0.8	-0.19816	0.18325	0.45845
	1	-0.29285	0.16254	0.2427		1	-0.27175	0.18285	0.37828
	1.8	-0.44755	0.04007	0.1065		1.8	-0.5206	0.11906	0.18523
	2.6	-0.47343	0.00371	0.0573		2.6	-0.65276	0.05117	0.10123
	3	-0.47505	0.00096	0.0442		3.4	-0.70296	0.01673	0.06114
	3.4	-0.47549	0.00027	0.0349		3.8	-0.71292	0.00891	0.04896
	3.8	-0.47561	0.00007	0.0272		4.2	-0.72168	0.00173	0.03009
	4.2	-0.47563	0.00001	0.0113		4.8	-0.72359	0.00031	0.01853
	4.3	-0.47563	0	0		5.4	-0.72411	0.00008	0.01234
						5.8	-0.72407	0.00004	0.01026
				6.4	-0.72411	0.00002	0.00844		
				7.2	-0.72411	0	0.00593		
				7.8	-0.72411	0	0		
				8.4	-0.72411	0	0		
				9	-0.72411	0	0		
				9.5	-0.72411	0	0		
0.75	0	0	0	1	3	0	0	0	1
	0.1	-0.00493	0.04768	0.9767		0.1	-0.00524	0.05074	1.09411
	0.4	-0.06477	0.14042	0.8735		0.4	-0.06831	0.14561	1.17866
	0.8	-0.19804	0.18059	0.6935		0.8	-0.19823	0.16289	0.89942
	1	-0.2703	0.17903	0.5988		1	-0.26011	0.14489	0.67947
	1.8	-0.51732	0.12407	0.2729		1.5	-0.37444	0.08268	0.20656
	2.6	-0.67138	0.07249	0.0912		2	-0.42047	0	0
	3	-0.72221	0.05546	0.0471					
	3.8	-0.79167	0.03348	0.01					
	4.8	-0.84142	0.01739	0.0009					
5.4	-0.85715	0.00848	0.0001						
5.8	-0.86078	0	0						

[2] Hanif K, Asghar S, Hayat T, 2007, The effect of the slip condition on unsteady flow due to non-coaxial rotations of disk and a fluid at infinity. Meccanica, vol.42:141.

[1] Sai KS, Rao BN, 2005, Magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct with suction and injection. Acta Mech, vol.57: 140.

همایش ملی مهندسی مکانیک NCME2010
ایران، دانشگاه واحد خمینی شهر،

- [15] Nayfeh AH, 2000, Perturbation methods. New York, Wiley,
- [16] Lyapunov AM, 1992, General problem on stability of motion (English translation). London, Taylor & Francis.
- [17] Adomian G, 1994, Solving frontier problems of physics: the decomposition methods. Boston, Kluwer Academic.
- [18] Liao SJ, 1992, The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University.
- [19] El-Nahas A, 2007, Analytic approximations for Von kármán swirling flow. Proc. Pakistan Acad. Sci, vol.44p: 181-187.
- [20] Turkyilmazoglu M, 2010, Analytic approximate solutions of rotating disk boundary layer flow subject to a uniform suction or injection. International Journal of Mechanical Sciences, vol.52: 1735–1744.
- [21] Turkyilmazoglu M, 2010, Purely analytic solutions of magnetohydrodynamic swirling boundary layer flow over a porous rotating disk. Computers & Fluids, vol.39:793–799.
- [22] Hewitt RE, Al-Azhari M, 2009, Non-axisymmetric self-similar flow between two rotating disks. J Eng Math, vol.63: 259–277.
- [23] Hayat T, Asghar S, Siddiqui AM, Haroon T, 2001, unsteady MHD flow due to non-coaxial rotations of a porous disk and a fluid at infinity. Acta Mechanica, vol.151:127-143.
- [24] Turkyilmazoglu M, 2005, Compressible mode of the rotating disk boundary layer flow leading to absolute instability. Applied Mathematics, vol.115:1-20.
- [3] Von kármán T, 1921, Über laminare und turbulence Reibung. ZAMM, vol.1:233-252.
- [4] White FM, 1991, Viscous Fluid Flow. second ed, McGraw-Hill Company.
- [5] Cochran WG, 1934, The flow due to a rotating disk. Proc. Camb. Phil. Soc, vol. 30:365-375.
- [6] Lai CY, Rajagopal KR, Szeri AZ, 1985, Asymmetric flow above a rotating disk. J. Fluid Mec, vol.157: 471–492.
- [7] Rajagopal KR, 1988, Swirling flows of viscoelastic fluids. Int. J. Eng Sci, vol.30:143–149.
- [8] Sparrow EM, Cess RD, 1962, Magnetohydrodynamic flow and heat transfer about a rotating disk. J. Appl. Mech, vol.29: 181–187.
- [9] Thacker WI, Kumar SK, Watson LT, 1988, Magnetohydrodynamic flow and heat transfer about a rotating disk with suction and injection at the disk surface. Comput. Fluids, vol.16:183–193.
- [10] Turkyilmazoglu M, 2011, Exact solutions for the incompressible viscous magnetohydrodynamic fluid of a rotating disk flow. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol.46: 306–311.
- [11] Dardapat BS, Singh SK, 2011, Two-layer film flow on a rotating disk: A numerical study. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol.46 : 272–277.
- [12] Lai JH, 1979, An investigation of spin coating of electron resists. Polym. Eng. Sci, vol.19: 1117
- [13] Chen BT, 1983, Investigation of the solvent-evaporation effect on spin coating of thin films. Polym. Eng. Sci, vol.23:p399
- [14] Ma F, Hwang JH, 1990, The effect of a shear on the flow thin liquid film over a rough rotating disk. J. Appl. Phys, vol.68:p1265.